

2.Rezonans w obwodach elektrycznych

Celem ćwiczenia jest doświadczalne sprawdzenie podstawowych właściwości szeregowych i równoległych rezonansowych obwodów elektrycznych.

2.1. Wiadomości ogólne

2.1.1 Rezonans napięć

2.1.2 Rezonans prądów

2.2. Badania laboratoryjne

2.2.1 Rezonans napięć

2.2.1.1 Badanie wpływu pojemności na rezonans napięć.

2.2.1.2 Charakterystyki częstotliwościowe

2.2.2 Rezonans prądów

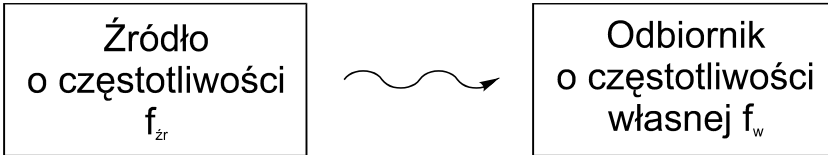
2.2.2.1 Badanie wpływu pojemności na rezonans prądów

2.2.2.2 Charakterystyki częstotliwościowe

2.3. Uwagi i wnioski

2.1. Wiadomości ogólne

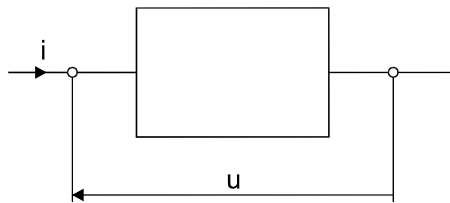
Zjawisko rezonansu występuje w różnych układach fizycznych i pojawia się wtedy, gdy układ jest poddany pobudzeniom okresowym f_{zr} o częstotliwości równej częstotliwości drgań własnych układu f_w , czyli $f_w=f_{zr}$.



Rys. 2.1. Mechanizm pobudzenia rezonansowego

W rezonansie elektrycznym częstotliwość źródła równa jest częstotliwości własnej obwodu, która zależy jedynie od wartości indukcyjności L i pojemności C . Warunkiem koniecznym (ale nie dostatecznym) wystąpienia rezonansu elektrycznego jest to, aby obwód zawierał zarówno kondensatory, jak i cewki.

Rozpatrzmy obwód elektryczny przedstawiony na rys.2.2.



Rys. 2.2. Odbiornik w obwodzie elektrycznym

Symbole u , i oznaczają wartości chwilowe sinusoidalnie zmiennego napięcia na odbiorniku oraz sinusoidalnie zmiennego prądu w odbiorniku. Odbiornik to szeregowe lub równoległe połączenie elementów R , L , C . Stosując prawo Ohma dla wartości skutecznych prądu i i napięcia można napisać:

dla połączenia szeregowego

$$\frac{U}{I} = Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad X = X_L - X_C \quad (2.1)$$

dla połączenia równoległego

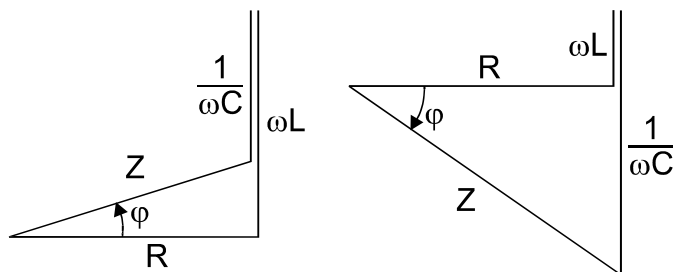
$$\frac{I}{U} = Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad B = B_C - B_L \quad (2.2)$$

gdzie: Z - moduł impedancji, Y - moduł admitancji, R - rezystancja, X - reakcja, G - konduktancja, B - susceptancja.

Rezonans można zdefiniować również jako stan obwodu, w którym reakcja odbiornika lub susceptancja odbiornika są równe zero.

Jeżeli w odbiorniku istnieje szeregowe połączenie elementów R, C, L i jest prawdziwy warunek $X=0$, to występuje **rezonans szeregowy** nazywany również **rezonansem napięć**.

Jeżeli w odbiorniku istnieje równoległe połączenie elementów R, C, L i występuje warunek $B=0$ to odbiornik jest w stanie **rezonansu równoległego** nazywanego również **rezonansem prądów**.



Rys. 2.3. Trójkąty impedancji: a) $\omega L > \frac{1}{\omega C}$; b) $\omega L < \frac{1}{\omega C}$

Z analizy trójkątów rezystancji przedstawionych na rys.2.3 wynika, że dla przypadku rezonansu, tzn. $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ prawdziwe są zależności: $\phi=0$, $Z=R$, czyli w obwodzie z rezonansem nie ma przesunięcia fazowego między prądem i napięciem. Obwód zachowuje się tak, jakby istniała w nim tylko rezystancja.

W stanie rezonansu moc czynna wynosi:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \phi = U \cdot I \quad (2.3)$$

a moc bierna:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \phi = 0 \quad (2.4)$$

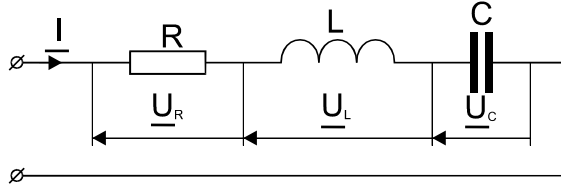
gdyż $\phi=0$.

Oznacza to, że cała energia elektryczna pobrana przez obwód przekształca się w ciepło w jego rezystancji R. Energia bierna przekazywana jest między elementami L i C z pominięciem źródła.

Inna definicja rezonansu elektrycznego podaje, że jest to stan obwodu, w którym występuje całkowita wewnętrzna wymiana energii biernych.

2.1.1. Rezonans napięć

Rozpatrzmy obwód składający się z elementów R, L i C połączonych szeregowo - rys. 2.4.



Rys. 2.4. Obwód szeregowy R, L, C

Moduł impedancji Z w tym obwodzie:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (2.1)$$

gdzie $X_L = \omega L$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$

oraz

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (2.2)$$

Ponieważ przy rezonansie kąt przesunięcia fazowego między prądem i napięciem $\phi=0$, to:

$$\operatorname{tg} \phi = 0,$$

a stąd

$$X_L = X_C$$

czyli

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (2.5)$$

gdzie $\omega = 2\pi f$.

Równanie (2.5) pozwala określić warunki, jakie powinny być spełnione, aby w obwodzie z rys.2.4. wystąpił rezonans.

W przypadku, gdy obwód zasilany jest ze źródła o stałej częstotliwości f, stan rezonansu można otrzymać regulując wartość indukcyjności L lub pojemności C (w praktyce dostraja się obwód do rezonansu stosując kondensator o regulowanej pojemności).

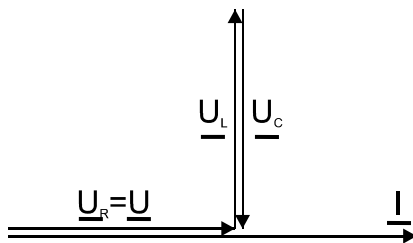
Aby uzyskać rezonans w obwodzie o ustalonych wartościach L i C , należy zastosować źródło napięcia o regulowanej częstotliwości. Częstotliwość, przy której wystąpi rezonans nazywamy **częstotliwością rezonansową** f_r . Wartość częstotliwości f_r otrzymamy z równania (2.5)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.6)$$

lub

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.7)$$

Wykres wskazowy obwodu szeregowego w stanie rezonansu przedstawia rys.2.5.



Rys. 2.5. Wykres wskazowy szeregowego obwodu szeregowego RLC w stanie rezonansu napięć

Należy zauważyć, że w stanie rezonansu szeregowego, czyli rezonansu napięć, występuje równoważenie się napięć na cewce i kondensatorze $U_L = U_C = 0$. Przy pewnych wartościach rezystancji R , indukcyjności L i pojemności C - napięcia U_L i U_C mogą przybierać stosunkowo duże wartości, mimo że napięcie zasilające obwód U jest stosunkowo małe. Mówimy wówczas, że w obwodzie występują **przebiecia**.

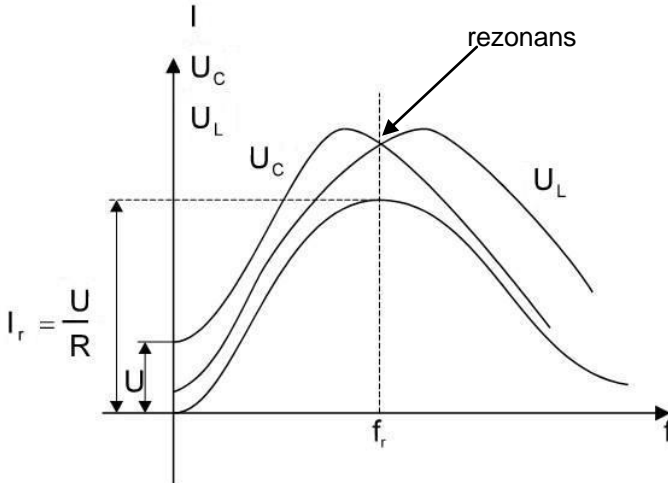
Dla zilustrowania właściwości obwodu rezonansowego wykreśla się charakterystyki częstotliwościowe. Są to charakterystyki przedstawiające zależności prądu I , napięć U_L oraz U_C od częstotliwości napięcia źródła zasilającego obwód. Charakterystyki częstotliwościowe obwodu rezonansowego otrzymuje się na podstawie poniższych zależności:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad (2.8)$$

$$U_L = I \cdot X_L \quad (2.9)$$

$$U_C = I \cdot X_C \quad (2.10)$$

Na rysunku 2.6 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe badanych wielkości.



Rys. 2.6. Charakterystyki częstotliwościowe

W miarę zwiększania częstotliwości reaktancja indukcyjna X_L wzrasta liniowo, zaś reaktancja pojemnościowa X_C maleje hiperbolicznie. Przy małych częstotliwościach w obwodzie płynie prąd o małej wartości wyprzedzający napięcie o kąt bliski 90° (obwód ma wtedy charakter pojemnościowy). Przy wielkich częstotliwościach w obwodzie płynie prąd o małych wartościach opóźniony względem napięcia o kąt bliski 90° (obwód ma wtedy charakter indukcyjny).

Przy częstotliwości rezonansowej $f=f_r$ wartości reaktancji X_L i X_C są sobie równe, a prąd I osiąga największą wartość ograniczoną jedynie rezystancją R w obwodzie ($I_r = \frac{U}{R}$).

Napięcie U_C osiąga wartość maksymalną dla częstotliwości tuż przed rezonans, natomiast napięcie U_L tuż po rezonansie. Przy częstotliwości rezonansowej napięcia U_C i U_L są sobie równe.

Zależność prądu I w obwodzie od częstotliwości f (rys.2.6), nazywana jest często **krzywą rezonansową obwodu**. Kształt tej krzywej zależy głównie od stosunku reaktancji indukcyjnej X_L do rezystancji R obwodu.

Iloraz ten nosi nazwę **dobroci obwodu**:

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{2\pi fL}{R} \quad (2.11)$$

Dobroć obwodu jest funkcją częstotliwości, przy częstotliwości rezonansowej przyjmuje ona wartość:

$$Q_r = \frac{2\pi f_r L}{R} \quad (2.12)$$

W stanie rezonansu napięcie na indukcyjności jest równe:

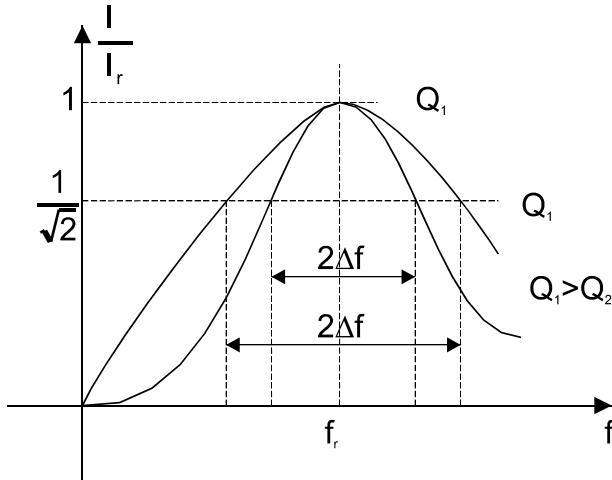
$$U_{Lr} = I_r \cdot X_{Lr} = \frac{U}{R} \cdot X_{Lr} = U \cdot Q_r \quad (2.13)$$

Napięcie to, równe napięciu na kondensatorze, może być Q_r razy większe od napięcia zasilającego. Ten Q_r -krotny wzrost napięcia na kondensatorze lub cewce jest zjawiskiem niekorzystnym ze względu na możliwość przebicia kondensatora lub izolacji cewki, natomiast zjawiskiem korzystnym w przypadku wielu obwodów elektronicznych, uniemożliwiającym generowanie napięć o określonych częstotliwościach. W obwodach radiotechnicznych Q może przybierać wartości od 50 do 200.

Na rysunku 2.7 przedstawiono krzywe rezonansowe obwodów o różnych wartościach dobroci.

Taki sposób przedstawienia krzywych rezonansowych ułatwia znacznie analizę właściwości obwodu rezonansowego. Z rysunku 2.7 wynika, że im większa dobroć obwodu rezonansowego, tym ostrzejsza jest krzywa rezonansowa. Dobroć obwodu w zasadzie jest określona jakością cewki, ponieważ w niej koncentrują się prawie wszystkie straty energii w obwodzie. W obwodzie o dostatecznie dużej dobroci (rzędu kilkudziesięciu i więcej), nawet przy małych odstrojeniach od częstotliwości rezonansowej, prąd będzie gwałtownie malał w porównaniu z jego wartością przy rezonansie. Oznacza to, że tylko źródła o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowej obwodu mogą spowodować, że moduł impedancji obwodu rezonansowego jest równy jego rezystancji lub do niej zbliżony. Inaczej - obwód osiąga minimalną impedancję w określonym paśmie częstotliwości. Tę jego właściwość określa się mianem **pasma przepuszczania obwodu**, tzn. pasma $-2\Delta f$, w otoczeniu częstotliwości rezonansowej f_r , w którego końcach

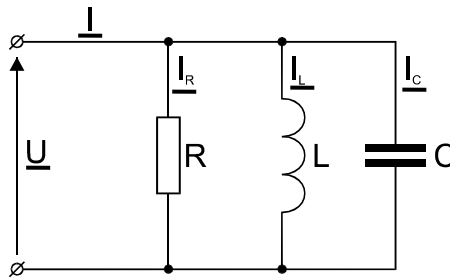
wartość skuteczna prądu I w obwodzie spada do $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ wartości tego prądu przy rezonansie (patrz rys.2.7). Szerokość pasma przepuszczania $2\Delta f$ stanowi zwykle 0,3...2% częstotliwości rezonansowej.



Rys. 2.7. Krzywe rezonansowe obwodów o różnych wartościach dobroci Q

Zdolność obwodu do przepuszczania prądów o częstotliwościach zbliżonych do częstotliwości rezonansowej i praktycznie nieprzepuszczania prądów o innych częstotliwościach nosi nazwę **selektywności obwodu**. Selektowność obwodu jest tym większa, im mniejsze jest jego pasmo przepuszczania, czyli im większą ma on dobroć. Selektowność obwodu jest szeroko wykorzystywana w radiotechnice.

2.1.2. Rezonans prądów



Rys. 2.8. Obwód równoległy R, L, C

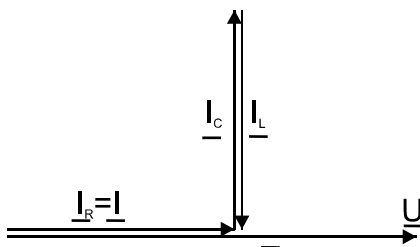
Rozpatrzmy obwód składający się z elementów R, L, C połączonych równoległe (rys.2.8)

Na rysunku 2.9 przedstawiono wykres wskazowy dla tego obwodu przy założeniu, że w obwodzie występuje rezonans, a więc kąt przesunięcia fazowego między prądem I , a napięciem U jest równy zero.

W stanie rezonansu równoległego, czyli rezonansu prądów mamy:

$$\underline{I}_L + \underline{I}_C = 0$$

co oznacza, że prądy w cewce i kondensatorze równoważą się.



Rys. 2.9. Wykres wskazowy równoległego obwodu R, L, C w stanie rezonansu prądów

Ponieważ w stanie rezonansu

$$I_L = I_C$$

oraz

$$I_L = \frac{U}{X_L}, \quad I_C = \frac{U}{X_C}$$

więc

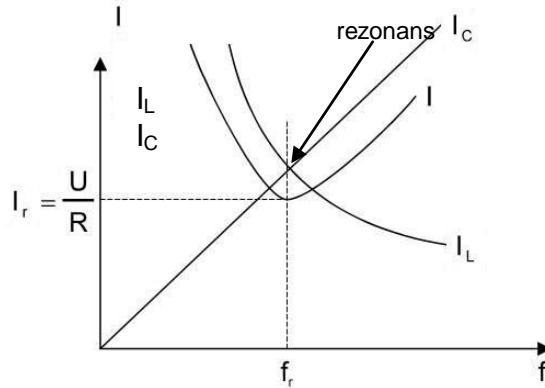
$$X_L = X_C \text{ lub } \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (2.14)$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wyrażenie, które musi być spełnione, aby obwód z rys.2.8 znalazł się w stanie rezonansu. Równanie (2.14) może być spełnione przez odpowiedni dobór indukcyjności L i pojemności C przy stałej częstotliwości f źródła napięcia zasilającego lub przez zmiany częstotliwości źródła, gdy stałe są wartości L i C.

Z zależności (2.14) otrzymujemy wyrażenie na częstotliwość rezonansową:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.15)$$

Częstotliwość rezonansowa w przypadku rezonansu prądów opisana jest za pomocą identycznej zależności jak częstotliwość przy rezonansie szeregowym.



Rys. 2.10. Charakterystyki częstotliwościowe

Właściwości równoległego obwodu rezonansowego dobrze ilustrują zależności prądów I , I_L , I_C od częstotliwości źródła f

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} \quad ..(2.16)$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L} \quad (2.17)$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = U\omega C \quad (2.18)$$

Na rysunku 2.10 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe prądów I , I_L i I_C . W stanie rezonansu prąd I ma wartość minimalną ograniczoną przez rezystancję R , natomiast prądy I_L i I_C równoważą się.

Dobroć obwodu równoległego związana jest zasadniczo ze stratami mocy w kondensatorze i zależy od stosunku rezystancji R do reaktancji X_C .

Dobroć $Q = \frac{R}{X_C}$, w stanie rezonansu:

$$Q_r = \frac{R}{X_{C_r}} = \frac{R}{X_{L_r}} \quad (2.19)$$

oraz

$$I_{L_r} = I_{C_r} = \frac{U}{X_{L_r}} = \frac{U}{R} Q_r = I_r Q_r \quad (2.20)$$

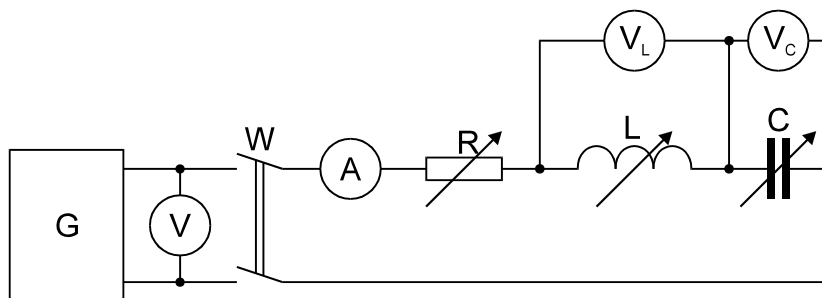
Oznacza to, że przy rezonansie prądy I_L i I_C są Q_r razy większe od prądu pobieranego przez obwód co nosi nazwę **przetężenia**.

2.2. Badania laboratoryjne

2.2.1. Rezonans napięć

2.2.1.1. Badanie wpływu pojemności na rezonans napięć

Układ pomiarowy przedstawiono na rys.2.11.



Rys. 2.11. Schemat układu pomiarowego

Oznaczenia:

- G - generator, A - amperomierz, V_L , V_C , V - woltomierze,
- R - rezystor dekadowy, L - indukcyjność dekadowa,
- C - pojemność dekadowa

Pomiary dla różnych wartości pojemności wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.11. Wyniki pomiarów i obliczeń należy zamieścić w tabeli 2.1.

Tabela 2.1.

U=....., f=....., L=....., R=.....

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	C	I	U_L	U_C	X_C	X_L
	μF	mA	V	V	Ω	Ω
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład obliczeń:

$$X_L =$$

$$X_C =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i obliczeń sporządzić wykresy I, U_L , U_C w funkcji X_C . Narysować wykresy wskazowe dla obwodu w stanie rezonansu oraz dla obydwu krańcowych przypadków odstrojenia od rezonansu.

2.2.1.2. Charakterystyki częstotliwościowe

Pomiary dla różnych wartości częstotliwości wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.11. Wyniki pomiarów i obliczeń należy zamieścić w tabeli 2.2.

Tabela 2.2.

U=....., C=....., L =....., R =.....

Lp.	Pomiar				Obliczenie		
	f	I	U _L	U _C	X _L	X _C	$\frac{I}{I_r}$
	Hz	mA	V	V	Ω	Ω	-
1.							
2.							
3.							
4.							
5.							
6.							
7.							

Przykład obliczeń:

$$X_L = X_C =$$

$$2\Delta f = Q_r =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i obliczeń przedstawić na jednym wykresie charakterystyki częstotliwościowe I, U_L, U_C.

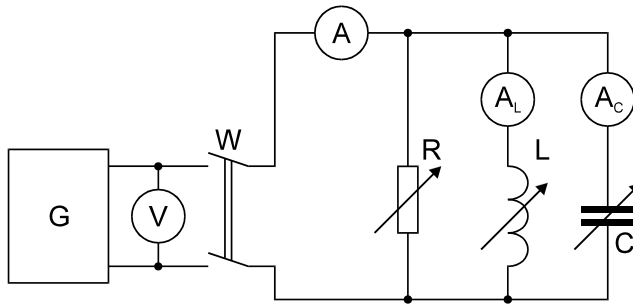
Narysować na wspólnym wykresie krzywe rezonansowe obwodu: I=F(f).

Określić szerokość pasma przepuszczania 2Δf i dobroć obwodu w stanie rezonansu.

2.2.2. Rezonans prądów

2.2.2.1. Badanie wpływu pojemności na rezonans prądów

Układ pomiarowy przedstawiono na rys.2.12.



Rys. 2.12. Schemat układu pomiarowego

Oznaczenia:

G - generator, A, A_L , A_C - amperomierze, V - woltomierz,

R - rezystor dekadowy, L - indukcyjność dekadowa,

C - pojemność dekadowa

Pomiary dla różnych wartości pojemności wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.12. Wyniki pomiarów i obliczeń należy zamieścić w tabeli 2.3.

Tabela 2.3.

U=....., f=....., L=....., R=.....

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	C	I	I _C	I _L	X _C	X _L
	μF	mA	mA	mA	Ω	Ω
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład obliczeń:

$$X_L =$$

$$X_C =$$

Na podstawie otrzymanych wyników pomiarów i obliczeń sporządzić wykresy I, I_L, I_C w funkcji X_C. Narysować wykresy wskazowe dla obwodu w stanie rezonansu oraz dla obydwu krańcowych przypadków odstrojenia od rezonansu.

2.2.2.2. Charakterystyki częstotliwościowe

Pomiary dla różnych wartości częstotliwości wykonujemy w układzie, którego schemat został podany na rys. 2.12. Wyniki pomiarów i obliczeń należy zamieścić w tabeli 2.4.

Tabela 2.4.

U=....., L=....., C=....., R=.....

Lp.	Pomiar				Obliczenia	
	f	I	I _C	I _L	X _C	X _L
	Hz	mA	mA	mA	Ω	Ω
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						

Przykład obliczeń:

$$X_L =$$

$$X_C =$$

Na podstawie otrzymanych wyników i obliczeń przedstawić na wykresie charakterystyki częstotliwościowe I, I_C, I_L obwodu.

2.3. Uwagi i wnioski

Porównać przebiegi charakterystyk otrzymane w ćwiczeniu z przebiegami znanymi z teorii.

Literatura

- [1] Krakowski M. Elektrotechnika Teoretyczna. Obwody liniowe i nieliniowe. t.I, WNT, 1995
- [2] Praca zbiorowa: Elektrotechnika i elektronika dla nieelektryków, WNT, Warszawa, 1999.